



TITLE:

# 2次のSiegel保型形式とAbel曲面の ゼータ関数に関するR. Salvati Manni-J. Top予想の証明 (保型形式 の構成とその応用)

AUTHOR(S):

岡崎, 武生

---

CITATION:

岡崎, 武生. 2次のSiegel保型形式とAbel曲面のゼータ関数に関するR. Salvati Manni-J. Top予想の証明 (保型形式の構成とその応用). 数理解析研究所講究録 2004, 1398: 208-214

ISSUE DATE:

2004-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/26017>

RIGHT:

# 2 次の Siegel 保型形式と Abel 曲面の ゼータ関数に関する

R. Salvati Manni-J. Top 予想の証明

岡崎 武生 (大阪大学大学院理学研究科)

## 1 予想の紹介と結果

吉田敬之先生により全ての有理数体上定義された Abel 曲面の Hasse-Weil ゼータ関数は或る 2 次の Siegel 保型形式の Spinor- $L$  関数に一致するのではないかと予想されていますが、R. Salvati Manni-J. Top 予想とは、この吉田予想の成立している Abel 曲面と Siegel 保型形式の候補を与えるものでした。

Abel 曲面としては、 $\mathbb{Q}$  上定義された超楕円曲線  $C: y^2 = x^5 - x$  のヤコビアン  $J(C)$  をとり、2 次の Siegel 保型形式の方は、井草テータ関数の 4 積で以下の様に定義されます。

characteristic  $m = (m_1, m_2, m_3, m_4) \in \mathbb{R}^4$  に対して、次数 2 の Siegel 上半空間  $\mathfrak{H}_2$  上の井草テータ関数  $\theta_m$  を

$$\theta_m(Z) := \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2} e\left(\frac{Z}{2} \begin{bmatrix} a_1 + m_1 \\ a_2 + m_2 \end{bmatrix} + (a_1 + m_1, a_2 + m_2) \begin{pmatrix} m_3 \\ m_4 \end{pmatrix}\right)$$

(但し、 $e(t) = \exp(2\pi\sqrt{-1}t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $Z \in \mathfrak{H}_2$ ,  $Z[x] = {}^t x Z x$ ) とおき、 $n = (n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{R}^4$  に対して

$$\Theta_n(Z) = \theta_{[(0,0,0,\frac{1}{4})+n]}(Z) \theta_{[(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\frac{1}{4})+n]}(Z) \theta_{[(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4})+n]}(Z) \theta_{[(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4})+n]}(Z)$$

とおきます。このとき、 $n_i = 0$  or  $\frac{1}{2}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,  $n_4 = 0$  とする事で得られる 8 つの  $\Theta_n(Z)$  が、その Siegel 保型形式の候補です。なお、これらの  $\Theta_n$  は  $\Gamma(4) = \text{Ker}(Sp_2(\mathbb{Z}) \rightarrow Sp_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}))$  上定義された  $\Gamma(8)$  上 trivial な或る congruence-character  $\chi_1$  付きのカスプ形式の空間に入っています。

### 予想

8つの  $\Theta_n$  は全て、Hecke 同時固有カスプ形式で *Spinor L*-関数は全て、 $J(\mathbf{C})$  の Hasse-Weil ゼータ関数と一致する。(但し、2 の Euler 因子は除く。)

というものでした。そして、

### 主定理

『この予想は全て正しい。』

を示したので、その証明方法を紹介します。

## 2 証明のアウトライン

証明の手順は以下の①～③です。

①まず、Hasse-Weil ゼータ関数  $\zeta(s, J(\mathbf{C}))$  は、或る Grössen-character  $\lambda$  で具体的に書けます。

何故なら、楕円曲線  $E: y^2 = x(x-1)(x-3-2\sqrt{2})$  に対して、

$$\begin{aligned} \pi: C &\ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x(x+1)}{x-1} \\ \frac{y(x-1-\sqrt{2})}{(x-1)^2} \end{pmatrix} \in E \\ J(\mathbf{C}) &\cong \text{Res}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}(E) \quad \text{isogenous over } \mathbb{Q} \end{aligned}$$

( $\text{Res}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}$  は Weil restriction) と分解され、さらに楕円曲線  $E$  は  $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$  上の虚数乗法

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\sqrt{-2}} \begin{pmatrix} \frac{-(x-1)(x-3-2\sqrt{2})}{2x} \\ \frac{\sqrt{-2}y(x^2-3-2\sqrt{2})}{4x^2} \end{pmatrix}$$

をもつので、8 分体  $\mathbb{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(e(1/8))$  の Grössen-character  $\lambda$  で志村-Milne の虚数乗法論により、

$$\begin{aligned} \zeta(s, J(\mathbf{C})) &= \zeta(s, E/\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \\ &= L(s, \lambda) = \prod_{(\mathfrak{p}, 2)=1} (1 - \lambda(\mathfrak{p})N\mathfrak{p}^{-s})^{-1} \end{aligned}$$

とかけます。ここで、 $\mathbb{Q}(e(1/8))$  のイデアル (2) に関する類数は 1 なので、

$$\lambda(\mathfrak{p}) = N_{\mathbb{Q}(e(1/8))/\mathbb{Q}(\sqrt{-2})}(\alpha), \mathfrak{p} = (\alpha), \alpha \equiv 1 \pmod{2}$$

と完全に定義されます。

そして、Grössen-character  $\mu: \mathbb{Q}(\sqrt{-2})_{\mathbb{A}}^{\times} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$  を、 $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$  のイデア  
ル  $(2\sqrt{-2})$  に関する類数は 1 であることに注意して

$$\mu(\mathfrak{p}) = \alpha, \mathfrak{p} = (\alpha), \alpha \equiv 1 \pmod{2\sqrt{-2}}$$

と定義すると

$$L(s, \lambda) = L(s, \mu)L(s, \bar{\mu})$$

と分解されます。ここで、 $\bar{\cdot}$  は複素共役を意味します。

② Spinor  $L$ -関数が  $L(s, \lambda) = L(s, \mu)L(s, \bar{\mu})$  になる Siegel 保型形式が、以  
下の方法 i) ~ iii) で構成できます。

i) まず、

$$\theta_{\mu}(z) = \sum_{\mathfrak{n}} \mu(\mathfrak{n}) \mathbf{e}(N(\mathfrak{n})z), z \in \mathfrak{H}_1$$

( $\mathfrak{n}$  は 2 と互いに素な  $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$  の整イデアルを走る) とおくと、 $\theta_{\mu}$  は Hecke  
eigen cusp-form で  $L(s, \theta_{\mu}) = L(s, \mu)$  となります。また、 $\mu$  の conductor  
から、

$$\theta_{\mu} \in S_2(\Gamma_0(64), \omega_2)$$

であることもわかります。ここで、 $S_2$  で楕円カスプ形式の空間をあらわ  
し、 $\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$ 、 $\omega_2$  は 2 次拡大

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$  に関する Dirichlet character です。

即ち、 $\theta_{\mu}(\gamma \cdot z) = j(\gamma, z)^2 \omega_2(a) \theta_{\mu}(z)$  となっています。また、同様に

$$\theta_{\bar{\mu}} \in S_2(\Gamma_0(64), \omega_2)$$

です。

ii)  $\theta_{\mu}$  は 2 に関する Fourier 係数はすべて消えているので 2 に関しては、  
super-cuspidal representation となっています。 $\theta_{\mu}$  のレベルは 2 冪のみ  
なので、他の有限素点では主系列表現となっていることから、Jacquet-  
Langlands 理論により、2 でのみ分岐する  $\mathbb{Q}$  上定義された定符号四元数  
環  $D_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i + \mathbb{Q}j + \mathbb{Q}ij, i^2 = j^2 = 1, ij = -ji$  の或る保型形式  $\varphi$  で  
 $L(s, \varphi) = L(s, \mu)$  となるものが存在します。ここで、 $D_{\mathbb{Q}}$  の order  $R$  上の  
character  $\chi$  付きの保型形式  $\varphi$  を

$$\varphi(\gamma g k) = \chi(k) \varphi(g), \gamma \in D_{\mathbb{Q}}^{\times}, g \in D_{\mathbb{A}}^{\times}, k \in \prod_{p < \infty} R_p^{\times}$$

という形の  $D_{\mathbb{Q}}$  のイデール  $D_{\mathbb{A}}^{\times}$  上の  $\mathbb{C}$ -valued な連続関数で、以下  $\mathcal{A}(R, \chi)$  でこのような関数の空間を表すことにします。

一般に、 $D_{\mathbb{A}}^{\times}$  は

$$D_{\mathbb{A}}^{\times} = \bigcup_i^{h(R)} D_{\mathbb{Q}}^{\times} \alpha_i (\mathbb{H} \times \prod_p R_p^{\times}) \quad (\text{有限直和}), \mathbb{H} = D_{\infty}$$

と分解できるので、 $\alpha_i$  で値を決めることで  $\varphi$  は、決定できます。ここで、 $h(R)$  は  $R$  に関する類数です。また、これらの関数は  $\varphi(\alpha_i)$  のみきまることから、 $\mathcal{A}(R, \chi)$  は有限次元ですし、Hecke operator の計算も容易です。また、自動的に  $L(s, \bar{\varphi}) = L(s, \bar{\mu})$  となります。

iii) ii) で定めた保型形式のペア  $\varphi, \bar{\varphi}$  から、吉田リフト (theta-lift の一種) で Siegel 保型形式  $Y(\varphi, \bar{\varphi})$  が構成できます。吉田リフトでは、一般に  $L(s, Y(\varphi_1, \varphi_2)) = L(s, \varphi_1) L(s, \varphi_2)$  となっているので、

$$L(s, Y(\varphi, \bar{\varphi})) = L(s, \varphi) L(s, \bar{\varphi}) = L(s, \mu) L(s, \bar{\mu}) = \zeta(s, J(C))$$

ですから、こうして所望の Siegel 保型形式が構成できます。

この吉田リフトの形は、 $\mathcal{A}(R, \chi)$  に対応する以下の条件を満たす、 $D_{\mathbb{A}} \oplus D_{\mathbb{A}}$  の Schwartz function  $f$  を

1. 無限素点  $\infty$  に於いて  $f_{\infty} = \exp(-2\pi(N(x_1) + N(x_2)))$  for  $x_1, x_2 \in \mathbb{H}$ .
2. 有限素点  $p$  で  $\chi_p$  ( $\chi$  の  $p$ -component) が trivial なら、 $f_p$  は  $R_p \oplus R_p$  の特性関数.
3. 有限素点  $p$  で  $\chi_p$  が trivial でないなら、 $f_p$  は全ての  $k_1, k_2 \in R_p^{\times}$  と全ての  $(x_1, x_2) \in D_p \oplus D_p$  に対して

$$f_p(k_1^{-1} x_1 k_2, k_1^{-1} x_2 k_2) = \overline{\chi_p(k_1)} \chi_p(k_2) f_p(x_1, x_2).$$

を取ると、

$$F(Z) = \sum_{i,j}^{h(R)} n_i^{-1} n_j^{-1} \sum_{\delta_i \in D_{\mathbb{Q}}} \left\langle \prod_{p < \infty} f_p(\alpha_i^{-1} \delta_1 \alpha_j, \alpha_i^{-1} \delta_2 \alpha_j) \right. \\ \left. \times e(N(\delta_1) z_1 + \text{Tr}(\delta_1 \cdot \delta_2^*) z_2 + N(\delta_2) z_3), \overline{\varphi_1(\alpha_i)} \varphi_2(\alpha_j) \right\rangle, \\ Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}_2$$

で与えられます。〈,〉は Hermitian 内積、 $n_i = |D_{\mathbb{Q}} \cap \alpha_i^{-1} R_{\mathbb{A}} \alpha_i|$ 、 $*$ は  $D_{\mathbb{Q}}$  の main-involution、 $N, \text{Tr}$  は被約ノルム、被約トレースを表しています。

③ 最後に適当な  $D_{\mathbb{A}}^{\times}$  の保型形式  $\varphi$  s.t  $L(s, \varphi) = L(s, \mu)$  と  $\varphi$  の入っている空間  $\mathcal{A}(R, \chi)$  に対応した Schwartz-function  $\prod_p f_p$  を取る事で予想の 8 つの  $\Theta_n$  が全て得られる事を示します。しかし、実は 8 つの  $\Theta_n$  は或る 2 の Hecke operator 達で移りあうことがわかるので、 $\Theta_{(0,0,0,0)}$  に関して証明すれば十分です。

$$\begin{aligned} \Theta_{(0,0,0,0)}(8Z) &= \sum_{x_i, y_j \in \mathbb{Z}} e\left(\frac{7}{8} + \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} + \frac{x_3 + x_4}{2}\right) \\ &\quad \times e\left(Z \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2y_1 \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} 2x_2 + 1 \\ 2y_2 + 1 \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} 2x_3 \\ 2y_3 + 1 \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} 2x_4 + 1 \\ 2y_4 + 1 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

となり、 $D_{\mathbb{Q}}$  の元  $\delta_1, \delta_2$  を

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 2x_1 + (2x_2 + 1) \cdot i + (2x_3) \cdot j + (2x_4 + 1) \cdot ij, \\ \delta_2 &= 2y_1 + (2y_2 + 1) \cdot i + (2y_3 + 1) \cdot j + (2y_4 + 1) \cdot ij, \end{aligned}$$

とおく。すると、 $\Theta_{(0,0,0,0)}$  は

$$\begin{aligned} \Theta_{(0,0,0,0)}(8Z) &= \sum_{x_i, y_i \in \mathbb{Z}} e\left(\frac{7}{8} + \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} + \frac{x_3 + x_4}{2}\right) \\ &\quad \times e(N(\delta_1)z_1 + \text{Tr}(\delta_1 \cdot \delta_2^*)z_2 + N(\delta_2)z_3) \end{aligned}$$

となります。

さて、この式と吉田リフトの形を比べながら、Schwartz-function  $f_p$  を

1. 素点 2 で  $f_2$  を  $\delta_1, \delta_2$  の座標  $x_i, y_i$  が全て  $\mathbb{Z}_2$  に入っているとき、 $f_2(\delta_1, \delta_2) = e\left(\frac{7}{8} + \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} + \frac{x_3 + x_4}{2}\right)$ 、それ以外は 0 とおきます。
2. 他の有限素点  $p$  で  $f_p$  を  $x_i, y_i \in \mathbb{Z}_p$  のとき 1、それ以外は 0 とおきます。

と選びます。次に  $D_{\mathbb{Q}}$  の order  $R$  と  $R$  の character  $\chi$  を、

$$f_p(k_1 \delta_1, k_1 \delta_2) = \overline{\chi_p(k_1)} f_p(\delta_1, \delta_2), \quad k_1 \in R_p^{\times}$$

という条件から、

$$R = \mathbb{Z} + 2\mathbb{Z}(i + j) + 2\mathbb{Z}(j + ij) + 4\mathbb{Z}ij,$$

$$\chi = \omega_2(a_1 + 4(a_2 + a_3 + a_4)), \text{ for } a_1 + 2a_2(i + j) + 2a_3(j + ij) + 4a_4ij \in R_2^{\times}$$

で、2以外の素点  $p$  では  $R_p$  は maximal order  $\chi_p$  は trivial と決定できます。  
 $R$  の類数  $h(R)$  は 4 で、

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = (i + j + ij)_2 \times \prod_{v \neq 2} 1_v,$$

$$\alpha_3 = (1 + 2i)_2 \times \prod_{v \neq 2} 1_v, \alpha_4 = (6 + i + 7j + 3ij)_2 \times \prod_{v \neq 2} 1_v$$

ととれます。そして、 $\mathcal{A}(R, \chi)$  の Brandt 行列 (Hecke-operator の有限次表現行列) を計算して  $L(s, \varphi) = L(s, \mu)$  となっていそうな固有保型形式  $\varphi$  を

$$\varphi(\alpha_1) = 1, \varphi(\alpha_2) = -\sqrt{-1}, \varphi(\alpha_3) = \varphi(\alpha_4) = 0$$

と選びます。

この  $\varphi$  とその複素共役  $\bar{\varphi}$  と上で定義した Schwartz function  $f$  をもちいて、吉田リフト  $Y(\varphi, \bar{\varphi})$  を計算します。

すると、Schwartz-function  $f$  の選び方から、当然  $\Theta_{(0,0,0,0)}(8Z)$  と  $Y(\varphi, \bar{\varphi})$  は非常に近い形をしています。ただ、 $(\alpha_i, \alpha_j) \neq (1, 1)$  のパートがはみ出しています。

しかし、このはみ出したパートは結局 cancel することが容易な計算でわかります。即ち、 $\Theta_{(0,0,0,0)}(8Z) = Y(\varphi, \bar{\varphi})$  ですから、 $\Theta_{(0,0,0,0)}(8Z)$  は Hecke 同時固有形式で、 $L(s, \Theta_{(0,0,0,0)}) = L(s, \varphi)L(s, \bar{\varphi})$  であることが解りました。(但し、Bad prime 2 に関する Euler factor は除きます)

一方、 $\varphi$  から楕円保型形式  $\theta_\varphi$  を

$$\theta_\varphi(z) = \sum_i^{h(R)} n_i^{-1} \sum_{\delta \in D_{\mathbf{Q}}} \left\langle \prod_{p < \infty} f_p^{(1)}(\delta \alpha_i) e(N(\delta)z), \varphi(\alpha_i) \right\rangle,$$

と構成して  $\theta_\varphi$  は Hecke 固有形式  $L(s, \varphi) = L(s, \theta_\varphi)$  で  $\theta_\varphi \in S_2(\Gamma_0(64), \omega_2)$  であることがわかります。ここで  $D_p$  の Schwartz-function  $f_p^{(1)}$  は、

1. 素点 2 では、 $\delta \in R_2^\times$  なら  $f_2^{(1)}(\delta) = \chi_2(\delta)$  でそれ以外では 0
2. 他の有限素点  $p$  で  $R_p$  の特性関数

とおいています。この構成法  $\varphi \rightarrow \theta_\varphi$  は一般の Hecke 固有形式  $\varphi$  から Hecke 楕円保型形式を構成するものです。

そして  $\dim_{\mathbb{C}} S_2(\Gamma_0(64), \omega_2) = 2$  と計算してこの空間  $S_2(\Gamma_0(64), \omega_2)$  は  $\theta_\mu, \theta_{\bar{\mu}}$  で張られていることがわかるので  $\theta_\mu = \theta_\varphi, \theta_{\bar{\mu}} = \theta_{\bar{\varphi}}$  となるので

$$L(s, \varphi) = L(s, \mu), L(s, \bar{\varphi}) = L(s, \bar{\mu})$$

と結論付けられて予想は完全に証明されました。最後に、 $\theta_\varphi = \theta_\mu$  を示せたのは、たまたま  $\dim_{\mathbb{C}} S_2(\Gamma_0(64), \omega_2) = 2$  となっていたからというわけではないことを注意しておきます。

[P-Y] などによりカスプ形式の Fourier 係数がその重さ、レベルに対応した或る定数個消えていればそのカスプ形式自身が 0 であるという結果があるので、Fourier 係数を沢山計算することで  $\theta_\varphi = \theta_\mu$  を示すという手段もあります。

## 参考文献

- [I-K-O] T. Ibukiyama, T. Katsura and F. Oort: Super singular curves of genus two and class numbers. *Composito Math.* **57** (1986), 127-152
- [J-L] H. Jacquet and R. P. Langlands :Automorphic forms on  $GL(2)$ , *Lecture Notes in Math.* **114**
- [M] J. S. Milne: On the arithmetic of abelian varieties, *Invent. Math.* **17** (1972), 177-190.
- [P-Y] C. Poor and D. Yuen: LInear dependence among Siegel modular forms. *Math. Ann.* **318**, 205-234(2000)
- [SM-T] R. Salvati Manni and J. Top: Cusp forms of weight 2 for the group  $\Gamma(4, 8)$ , *Amer. J. Math.* **115** (1993), 455-486.
- [S-T] G. Shimura and Y. Taniyama: Complex multiplication of abelian varieties, *Mathematical Societiy of Japan* (1961).
- [Y] H. Yoshida: Siegel's modular forms and the arithmetics of quadratic forms, *Invent. Math.* **60** (1980), 193-248.